

## Examen du 10/04/2002

*Corrigé*

### Exercice I

Soit  $L$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^5$  par

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(y^2 + z^2 - 4)$$

on a

$$\nabla L(x, y, z, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 2 - \lambda - 2y\mu \\ -\lambda - 2z\mu \\ -(x + y + z - 1) \\ -(y^2 + z^2 - 4) \end{pmatrix}$$

ainsi  $(x, y, z, \lambda, \mu)$  est point critique de  $L$  si et seulement si

$$\begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ 2 - \lambda - 2y\mu = 0 \\ -\lambda - 2z\mu = 0 \\ x + y + z = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{1}{2\mu} \\ z = -\frac{1}{2\mu} \\ x = 1 \\ \frac{1}{2\mu^2} = 4 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2\mu} \\ z = -\frac{1}{2\mu} \\ \lambda = 1 \\ \mu^2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \\ \lambda = 1 \\ \mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \\ \lambda = 1 \\ \mu = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

si et seulement si

$$(x, y, z, \lambda, \mu) \in \left\{ \left(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right); \left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right\}$$

D'autre part

$$L_{XX}f(x, y, z, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu \end{pmatrix}$$

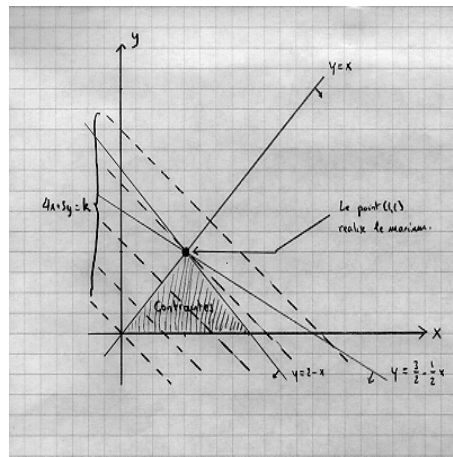
donc

$$L_{XX}f\left(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$L_{XX}f\left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la première matrice sont négatives et les valeurs propres de la première matrice sont positives. Ainsi  $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$  est un maximum et les multiplicateurs de Lagrange associés sont respectivement 1 et  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  pour la première et la seconde contrainte, d'autre part  $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$  est un minimum et les multiplicateurs de Lagrange associés sont respectivement 1 et  $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$  pour la première et la seconde contrainte.

## Exercice II



## Exercice III

1. Considérons le gradient  $G$  de cette fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2y + xy^2 - 4xy + 1$$

On a

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - 4y \\ x^2 + 2xy - 4x \end{pmatrix}$$

les points critiques de  $f$  sont donc les points  $(x, y)$  tels que

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + 2xy - 4x = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} y(2x + y - 4) = 0 \\ x(x + 2y - 4) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x + 2y - 4) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x(x + 2y - 4) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -2x + 4 \\ x(-3x + 4) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que  $(x, y) \in \{(0, 0), (4, 0), (0, -4), (4/3, 4/3)\}$ .

La matrice hessienne en  $(x, y)$  est

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 4 \\ 2x + 2y - 4 & 2x \end{pmatrix}$$

ainsi

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(4, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(0, 4) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H(4/3, 4/3) = \begin{pmatrix} 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Pour les trois premières matrices, les valeurs propres sont de signes contraires pour la troisième les deux valeurs propres sont positives, ainsi seul  $(4/3, 4/3)$  est un minimum.

**2.** Considérons  $X_0 = (1; 2)$ . On a

$$G(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

soit alors  $h(\alpha) = f(1, 2 + 3\alpha)$  on a

$$h(\alpha) = (2 + 3\alpha) + (2 + 3\alpha)^2 - 4(2 + 3\alpha) + 1$$

$$h(\alpha) = (2 + 3\alpha)(-1 + 3\alpha)$$

$$h(\alpha) = 9\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

ainsi  $h'(\alpha) = 18\alpha + 3$  donc la méthode de Curry donne  $\alpha = -\frac{1}{6}$ . Par suite  $X_1 = (1; 3/2)$

**3.** On propose l'algorithme suivant

- $k = 0$
- $x_0 = 1, y_0 = 2$
- Tant que  $\nabla f(x_k, y_k) > \varepsilon_{\text{fixé}}$  faire
  - Calculer  $d_k = -\nabla f(x_k, y_k)$
  - Soit  $h(\alpha) = f((x_k, y_k) + \alpha d_k)$
  - Soit  $\alpha_k = \min\{\alpha > 0 \text{ t.q. } h'(\alpha) = 0\}$
  - $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + \alpha_k d_k$
  - $k = k + 1$
- Retourner le point  $(x_k, y_k)$

## Exercice IV

1. Pour tout entier  $i$  de  $[1, n]$  considérons  $f_i(a, b, c) = (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$ . La matrice hessienne est

$$\begin{pmatrix} 2x_i^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc  $f_i$  est convexe, et  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  est une somme de fonctions convexes donc convexe également.

2. On a

$$\begin{aligned} \nabla f_i(a, b, c) &= -2 \begin{pmatrix} x_i^2(ax_i^2 + bx_i + c) \\ x_i(ax_i^2 + bx_i + c) \\ ax_i^2 + bx_i + c \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 \\ ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i \\ ax_i^2 + bx_i + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or  $\nabla f = \sum_{i=1}^n \nabla f_i$  donc

$$\nabla f(a, b, c) = -2n \begin{pmatrix} \overline{ax^4} + \overline{bx^3} + \overline{cx^2} \\ \overline{ax^3} + \overline{bx^2} + \overline{cx} \\ \overline{ax^2} + \overline{bx} + c \end{pmatrix}$$

Ainsi si  $(\mathcal{S})$  a une solution unique alors  $f$  admet un seul point critique  $(a, b, c)$  solution de ce système. Comme la fonction est convexe, ce point réalise le minimum.

3. On a  $M_1(-3, -4)$ ,  $M_2(-1, 2)$ ,  $M_3(1, 2)$  et  $M_4(3, 0)$ . donc

$$\overline{x^4} = (81 + 1 + 1 + 81)/4 = 82/2 = 41$$

$$\overline{x^3} = (-27 - 1 + 1 + 27)/4 = 0$$

$$\overline{x^2} = (9 + 1 + 1 + 9)/4 = 5$$

$$\overline{x} = (-3 - 1 + 1 + 3)/4 = 0$$

$$\overline{x^2y} = (-36 + 2 + 2)/4 = -32/4 = -8$$

$$\overline{xy} = (-12 - 2 + 2)/4 = -3$$

$$\overline{y} = (-4 + 2 + 2)/4 = 0$$

Or

$$\begin{bmatrix} 41 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 \\ 0 & 16 & 0 \\ -25 & 0 & 205 \end{bmatrix}$$

donc

$$(a, b, c) = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 \\ 0 & 16 & 0 \\ -25 & 0 & 205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} -40 \\ -48 \\ 8 \times 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/5 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

Ainsi la parabole cherchée est d'équation  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}$ .