Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation | Semestre 8

Examen du 10/04/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Vous devez justifier vos réponses.

Exercice I (5 points)

Minimiser $f(x, y, z) = x + 2y$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$. On explicitera les multiplicateurs de Lagrange.

Exercice II (3 points)

Maximiser $4x + 5y$ sous les contraintes suivantes

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Aucune méthode n'est imposée.

Exercice III (6 points)

On considère

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2y + xy^2 - 4xy + 1 \end{array}$$

1. Trouver le ou les minimums de f

2. On utilise la méthode du gradient avec une recherche linéaire de type Curry pour construire une suite minimisante (X_k) de f. On part de $X_0 = (1; 2)$. Calculer explicitement X_1

3. Donner un algorithme pour calculer les X_k.

Exercice IV (6 points)

Considérons n points du plan M_i avec $1 \leq i \leq n$ entier. Notons (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \overline{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

$$\overline{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \qquad \overline{x^2 y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Le but de cet exercice est de trouver des réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ minimise

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

1. Avec peu de calcul, montrer que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^3$.

2. Supposons que le système suivant ait une solution unique

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} \overline{x^4}a + \overline{x^3}b + \overline{x^2}c = \overline{x^2 y} \\ \overline{x^3}a + \overline{x^2}b + \overline{x}c = \overline{xy} \\ \overline{x^2}a + \overline{x}b + c = \overline{y} \end{cases}$$

Montrer que si $y = ax^2 + bx + c$ est l'équation de la parabole cherchée alors (a,b,c) est solution de $(\mathcal{S})$

3. Considérons $n = 4$ et les points $M_1(-3,-4)$, $M_2(-1,2)$, $M_3(1,2)$ et $M_4(3,0)$. On a

$$\begin{bmatrix} 41 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 5 & 0 & -25 \\ 0 & 16 & 0 \\ -25 & 0 & 205 \end{bmatrix}$$

Trouver la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ telle que $\sum_{i=1}^{4}(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$ est le plus petit possible.