

## Devoir 2

*A rendre le 21/3/2001*

Ce devoir doit être rédigé individuellement. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Le devoir doit être présenté en utilisant  $\text{\LaTeX}$ .

On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , et l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } z \leq f(x, y)\}$$

appelé hypographe de  $f$ .

### Exercice I

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $f$  pour que  $\mathcal{O}$  sont convexe. Même question pour concave. Dans le reste de ce devoir  $f$  n'est pas supposée satisfaire obligatoirement ces conditions. Néanmoins on précisera dans quel cas particulier on se trouve si c'est le cas.
2. Considérons  $d$  la distance euclidienne à  $\mathcal{O}$ . Donner une fonction à minimiser pour calculer  $d_{\mathcal{O}}(x, y, z)$ , où  $(x, y, z)$  est un point de  $\mathbb{R}^3$ .
3. On appelle fonction distance orientée à  $\mathcal{O}$ , et on note  $b$  la fonction définie par

$$b(x, y, z) = d_{\mathcal{O}}(x, y, z) - d_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}}(x, y, z)$$

Expliquer comment calculer  $b(x, y, z)$ , où  $(x, y, z)$  est un point de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice II

1. Réaliser un programme qui en tout point  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , calcule numériquement  $b(x, y, z)$ . Ce programme pourra être réalisé dans le langage de votre choix mais vous n'êtes pas autorisé à utiliser une bibliothèque de minimisation. Le programme devra être rendu avec votre devoir.
2. On appliquera ce programme au cas où  $f$  des définie par  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .