Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 8

Devoir 1

correction

Exercice I

1. Le coefficient directeur de (T) est $f'(x_0)$. Si (T) n'est pas horizontale alors $f'(x_0) \neq 0$. Comme f' est continue en x_0 il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V,\ f'(x) \neq 0$ ainsi f est strictement monotone sur V donc x_0 ne peut être un extremum local.

La réciproque est fausse comme le montre le contre exemple classique suivant : $x \mapsto x^3$.

2. Notons $h = x - x_0$. On a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

Comme (T) est horizontale on a $f'(x_0) = 0$, par suite $f(x) = f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \phi(h)$ avec $\phi(h) \in o(h^2)$.

- Supposons $f''(x_0) > 0$. Il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $\phi(h) > -\frac{1}{2}f''(x_0)h^2$ (l'idée est la suivante : sur ce voisinage ϕ est négligeable devant $f''(x_0)h^2$) ainsi $f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \geq f(x_0)$. Donc sur $\forall x \in V$ on a $f(x) \geq f(x_0)$. Donc x_0 est un minimum local.
- De manière analogue, si $f''(x_0) < 0$ alors il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $f(x) \leq f(x_0)$ donc x_0 est un maximum local.

Exercice II

1. On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

donc

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) \tag{1}$$

d'autre part

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc

$$x^2 \sin x = x^3 - \frac{x^5}{3} + o(x^5) \tag{2}$$

d'autre part

$$\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \tag{3}$$

En combinant (1), (2) et (3) il vient

$$f_\alpha(x) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) x^4 - \frac{107}{60} x^5 + o(x^5)$$

2.

Premier cas : $\alpha > \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{107}{60}x^5 + o(x^5)}{(\alpha - \frac{3}{2})x^4} = 0$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x| < \eta \Longrightarrow \left| \frac{\frac{107}{60}x^5 + o(x^5)}{(\alpha - \frac{3}{2})x^4} \right| < \varepsilon$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe un voisinage $V =]-\eta, \eta[$ de 0 tel que $\frac{107}{60}x^5 + o(x^5) \leq \frac{1}{2}(\alpha - \frac{3}{2})x^4$ par suite

$$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)x^4 \leq f_\alpha(x)$$

Donc $\forall x \in V$ on a $f(x) \geq f(0) = 0$. Donc 0 est un minimum local.

Deuxième cas : $\alpha < \frac{3}{2}$

De manière analogue il existe un voisinage V de 0 dans lequel $f(x) \leq f(0) = 0$ donc 0 est un maximum local.

Troisième cas : $\alpha = \frac{3}{2}$

On a alors $f_\alpha(x) = -\frac{107}{60}x^5 + o(x^5)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{-\frac{107}{60}x^5} = 0$$

donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x| < \eta \Longrightarrow |\frac{o(x^5)}{\frac{107}{60}x^5}| < \varepsilon$ en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe un voisinage $V =]-\eta, \eta[$ de 0 tel que

$$-\frac{107}{120}x^5 \leq o(x^5) \leq \frac{107}{120}x^5$$

par suite

$$-\frac{107}{120}x^5 \leq f_{\frac{3}{2}}(x) \leq \frac{321}{120}x^5$$

Ainsi $\forall x \in]-\eta, 0[$ on a $f_{\frac{3}{2}}(x) < 0$ et $\forall x \in]0, \eta[$ on a $f_{\frac{3}{2}}(x) > 0$ donc 0 n'est pas un extremum local de f.