

Devoir 1

A rendre le 27/2/2001

Ce devoir doit être rédigé individuellement. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Le devoir doit être présenté en utilisant \LaTeX .

Exercice I

On considère une fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ . On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et (T) la droite tangente à (\mathcal{C}) en $(x_0, f(x_0))$.

1. Montrer que si (T) n'est pas horizontale alors f ne peut admettre d'extremum en $(x_0, f(x_0))$ (une démonstration ne peut se réduire à une observation géométrique). Montrer que la réciproque est fautive en donnant un contre exemple.
2. Lorsque (T) est horizontale, montrer que f admet un minimum local en x_0 si $f''(x_0) > 0$ et un maximum local si $f''(x_0) < 0$. On pourra utiliser un développement limité de f à l'ordre 2.

Exercice II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons

$$\begin{aligned} f_\alpha :]-\infty, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha x^4 + 3x^2 + 6x \cos x + 5x^2 \sin x + 6 \ln(1-x) \end{aligned}$$

1. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5
2. La fonction f_α admet-elle un extremum en 0 ? Si oui dites de quelle nature. Discuter selon α le cas échéant.