Feuille d'exercices 2

Barycentres, Cartes affines

Exercice I

Construire à la règle le barycentre des systèmes suivants :

1. Trois points non alignés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$.

2. Quatre points non alignés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$, $(D, 4)$.

Exercice II

Soit ABC un triangle, avec P sur BC, Q sur AC, R sur AB. On suppose que AP, BQ, CR sont concourantes en G. En écrivant que G est le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ), démontrer le théorème de Ceva[1] :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Exercice III

Soient 3 points dans le plan, non alignés P_1, P_2, P_3. On considère les points, pour $t, s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} A_t &= (1-t)P_1 + tP_2 \\ A_s &= (1-s)P_1 + sP_2 \\ B_t &= (1-t)P_2 + tP_3 \\ B_s &= (1-s)P_2 + sP_3 \end{aligned}$$

Soit C l'intersection des deux segments $[A_t B_t]$ et $[A_s B_s]$.

[1] Giovanni Ceva, mathématicien Italien du XVII et XVIIIe siècle, a travaillé en géométrie pendant la majeure partie de sa vie. Dans une certaine mesure, il a également anticipé le calcul infinitesimal dans *Geometria Motus* qu'il publia en 1692. Dans *De Re Nummeraria* qu'il publia en 1711, il est l'un des premiers à travailler en mathématiques économiques. Ceva a également effectué un travail important sur l'hydraulique. Sur ce sujet il a publié *Opus hydrostaticum* en 1728. Il a occupé une position politique dans le Mantua et utilisa ses connaissances d'hydraulique pour empêcher un projet qui proposait de détourner le fleuve Reno dans le fleuve Po.

Giovanni Ceva (1647–1734)

1. Montrer que:

$$\mathrm{Rapp}(A_t, C, B_t) = \frac{s}{1-s}, \qquad \mathrm{Rapp}(A_s, C, B_s) = \frac{t}{1-t}$$

2. En déduire le théorème de Ménélaus :

$$\mathrm{Rapp}(B_s, B_t, P_2).\,\mathrm{Rapp}(P_2, A_t, A_s).\,\mathrm{Rapp}(A_s, C, B_s) = -1$$

Exercice IV

Démontrer que le transformé d'une partie convexe par une carte affine reste une partie convexe.

Exercice V

Montrer que les $n+1$ fonctions $f_i(t) = t^i, i = 0, ..., n$ sont linéairement indépendantes.