

## Interrogation du 7/3/2001

*correction*

### Exercice I

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les dimensions de l'aquarium en centimètres ( $z$  représente la hauteur).

La surface d'acier inoxydable nécessaire est  $xy$  donc le volume d'acier nécessaire (en  $cm^3$ ) est  $xyz$ , soit  $\frac{xy}{10^6}$  en  $m^3$ . Ainsi le coût correspondant, en Euros, est  $\frac{xy}{10^6} 5000 = \frac{xy}{200}$ . La surface de verre est  $2xz + 2yz$  donc le coût correspondant, en Euros, est  $\frac{2xz+2yz}{10^4} 10 = \frac{xz+yz}{500}$ . Finalement le coût de l'aquarium est

$$50 + \frac{xy}{200} + \frac{xz + yz}{500}$$

Si le budget est fixé à 400 € alors  $50 + \frac{xy}{200} + \frac{xz+yz}{500} = 400$  ce qui équivaut à  $z \frac{x+y}{500} = 350 - \frac{xy}{200}$ , c'est-à-dire

$$z = \frac{350 - \frac{xy}{200}}{\frac{x+y}{500}}$$

Le volume  $xyz$  s'exprime alors en fonction de  $x$  et  $y$ . Il vaut

$$f(x, y) = xy \frac{350 - \frac{xy}{200}}{\frac{x+y}{500}}$$

Telle est la fonction à maximiser sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ .

### Exercice II

1. Cela n'est pas possible. En effet, si  $f$  admet deux minimums locaux  $x_0 < x_1$  alors il existe  $a > 0$  tel que  $f'$  est positive sur  $]x_0, x_0 + a[$  et  $b > 0$  tel que  $f'$  est négative sur  $]x_1 - b, x_1[$ . Comme  $f'$  est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel  $y$  et d'un voisinage  $V$  de  $y$  tel que  $f'(x) < 0$  pour  $x < y$  et  $x \in V$ , et  $f'(x) > 0$  pour  $x > y$  et  $x \in V$ . Donc  $y$  est un maximum local, contradiction.

2. Cela est possible, comme le montre l'exemple suivant

$$f : (x, y) \mapsto y^2 + x^4 - 2x^2$$

On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

donc les points critiques sont  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ . Le premier et le dernier sont des minimums et le second est un point-selle.

### Exercice III

On considère la fonction de deux variables réelles

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y)^3}{3} - 2x^2 - y$$

1. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(x^2 + y)^2 - 4x \\ (x^2 + y)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

ainsi  $(x_0, y_0)$  est point critique de  $f$  si et seulement si

$$\begin{cases} 2x_0(x_0^2 + y_0 - \sqrt{2})(x_0^2 + y_0 + \sqrt{2}) = 0 \\ (x_0^2 + y_0 - 1)(x_0^2 + y_0 + 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à  $x_0 = 0$  et  $(y_0 = 1$  ou  $y_0 = -1)$ . Il y a donc deux points critiques  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .

2. Calculons la matrice Hessienne

$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x^4 + 12x^2y + 2y^2 - 4 & 4x(x^2 + y) \\ 4x(x^2 + y) & 2x^2 + 2y \end{pmatrix}$$

alors

$$H f(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 2 et  $-2$ , de signe contraire, donc  $(0, 1)$  est un point selle.

$$H f(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui a la valeur propre double  $-2$ , donc  $(0, -1)$  est un minimum.

3. Les figures 1 et 4 sont exclues, puisque  $(0, 1)$  est point selle et  $(0, -1)$  est minimum. Pour décider entre les figures 2 et 3 regardons le gradient de  $f$ , il apparait que lorsque  $y_0 < 0$  le polynôme  $2x_0(x_0^2 + y_0 - \sqrt{2})(x_0^2 + y_0 + \sqrt{2})$  a trois racines distinctes donc le gradient est colinéaire au vecteur  $j$  trois fois. Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau donc pour chaque ligne de niveau il doit y avoir 3 tangentes horizontales. La bonne figure est donc la figure 3.

