

Interrogation du 7/3/2001

correction

Exercice I

Soient x , y et z les dimensions de l'aquarium en centimètres (z représente la hauteur).

La surface d'acier inoxydable nécessaire est xy donc le volume d'acier nécessaire (en cm^3) est xyz , soit $\frac{xy}{10^6}$ en m^3 . Ainsi le coût correspondant, en Euros, est $\frac{xy}{10^6} 5000 = \frac{xy}{200}$. La surface de verre est $2xz + 2yz$ donc le coût correspondant, en Euros, est $\frac{2xz+2yz}{10^4} 10 = \frac{xz+yz}{500}$. Finalement le coût de l'aquarium est

$$50 + \frac{xy}{200} + \frac{xz + yz}{500}$$

Si le budget est fixé à 400 € alors $50 + \frac{xy}{200} + \frac{xz+yz}{500} = 400$ ce qui équivaut à $z \frac{x+y}{500} = 350 - \frac{xy}{200}$, c'est-à-dire

$$z = \frac{350 - \frac{xy}{200}}{\frac{x+y}{500}}$$

Le volume xyz s'exprime alors en fonction de x et y . Il vaut

$$f(x, y) = xy \frac{350 - \frac{xy}{200}}{\frac{x+y}{500}}$$

Telle est la fonction à maximiser sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice II

1. Cela n'est pas possible. En effet, si f admet deux minimums locaux $x_0 < x_1$ alors il existe $a > 0$ tel que f' est positive sur $]x_0, x_0 + a[$ et $b > 0$ tel que f' est négative sur $]x_1 - b, x_1[$. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel y et d'un voisinage V de y tel que $f'(x) < 0$ pour $x < y$ et $x \in V$, et $f'(x) > 0$ pour $x > y$ et $x \in V$. Donc y est un maximum local, contradiction.

2. Cela est possible, comme le montre l'exemple suivant

$$f : (x, y) \mapsto y^2 + x^4 - 2x^2$$

On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

donc les points critiques sont $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$. Le premier et le dernier sont des minimums et le second est un point-selle.

Exercice III

On considère la fonction de deux variables réelles

$$f(x, y) = \frac{(x^2 - y)^3}{3} - 2x^2 + y$$

1. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(x^2 - y)^2 - 4x \\ -(x^2 - y)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

ainsi (x_0, y_0) est point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x_0(x_0^2 - y_0 - \sqrt{2})(x_0^2 - y_0 + \sqrt{2}) = 0 \\ (x_0^2 - y_0 - 1)(x_0^2 - y_0 + 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x_0 = 0$ et $(y_0 = 1$ ou $y_0 = -1)$. Il y a donc deux points critiques $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

2. Calculons la matrice Hessienne

$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x^4 - 12x^2y + 2y^2 - 4 & 4x(x^2 - y) \\ 4x(x^2 - y) & 2x^2 - 2y \end{pmatrix}$$

alors

$$H f(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui a la valeur propre double -2 , donc $(0, -1)$ est un minimum.

$$H f(0, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 2 et -2 , de signe contraire, donc $(0, 1)$ est un point selle.

3. Les figures 2 et 3 sont exclues, puisque $(0, -1)$ est point selle et $(0, 1)$ est minimum. Pour décider entre les figures 1 et 4 regardons le gradient de f , il apparait que lorsque $y_0 < 0$ le polynôme $2x_0(x_0^2 - y_0 - \sqrt{2})(x_0^2 - y_0 + \sqrt{2})$ a trois racines distinctes donc le gradient est colinéaire au vecteur j trois fois. Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau donc pour chaque ligne de niveau il doit y avoir 3 tangentes horizontales. La bonne figure est donc la figure 1.

