

Examen du 11/4/2001

Correction

Exercice I

1. On considère

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(ax^2 - y + 1)$$

le gradient de cette fonction est

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(1 + \lambda a)x \\ 2y - \lambda \\ ax^2 - y + 1 \end{pmatrix}$$

Le point (x, y, λ) est donc un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} (1 + \lambda a)x = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ ax^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (1 + \lambda a)x = 0 \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ \lambda = 2ax^2 + 2 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (2a^2x^2 + 2a + 1)x = 0 \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ \lambda = 2ax^2 + 2 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^2x^2 + a + \frac{1}{2} = 0 \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ \lambda = 2ax^2 + 2 \end{cases}$$

si et seulement si

$$(x, y, \lambda) = (0, 1, 2) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = -\frac{2a+1}{2a^2} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Comme $a > -\frac{1}{2}$ on a $-\frac{2a+1}{2a^2} < 0$, ainsi (x, y, λ) est un point critique si et seulement si

$$(x, y, \lambda) = (0, 1, 2)$$

On a

$$L_{XX}(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 4a + 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $(0, 1)$ est un minimum, le multiplicateur de Lagrange associé est 2.

2. Soit M un point de coordonnées (x, y) . La distance de M à l'origine est $\sqrt{x^2 + y^2}$. En outre, ce point est sur $\mathcal{P}_a$ si et seulement si $y = ax^2 + 1$. Il s'agit donc de minimiser $\sqrt{x^2 + y^2}$ sous la contrainte $y = ax^2 + 1$. Or $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc le problème de minimisation se réduit au problème étudié dans la question 1. Le point de $\mathcal{P}_a$ qui est le plus proche de l'origine est $(0, 1)$.

Lorsque $a > 0$ cela est évident pour des raisons géométriques. Lorsque $a \in]-\frac{1}{2}, 0[$, on le démontre en observant que la parabole est au dessus du cercle centré à l'origine et de rayon 1.

Exercice II

1. La matrice hessienne

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est positive sur $\mathbb{R}^3$ donc f est convexe.

2. Soit $X_0 = (1, 1, 1)$. On a $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ donc $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère

la direction de descente $d = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Posons $h(\alpha) = f(1, 1 - 2\alpha, 1 - 2\alpha)$. On a $h(\alpha) = -2 + 2(1 - 2\alpha)^2$ donc $h'(\alpha) = -8(1 - 2\alpha)$. La recherche linéaire de Curry recommande de prendre $\alpha = \frac{1}{2}$.

Posons $X_1 = X_0 + \frac{1}{2}d$ on a alors $X_1 = (1, 0, 0)$. On a $\|\nabla f(X_1)\| = 0 < 10^{-1000}$ on arrête donc l'algorithme.

3. Le gradient de f s'annule en X_1 donc X_1 est point critique. Comme f est convexe c'est un minimum global de la fonction.

Exercice III

Soit x, y et z ces trois nombres, on considère la fonction $f(x, y, z) = xyz$ et la contrainte $g(x, y, z) = x + y + z - 100$ laquelle est explicitable. Il s'agit donc de maximiser dans $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$F(x, y) = xy(100 - x - y)$$

il vient

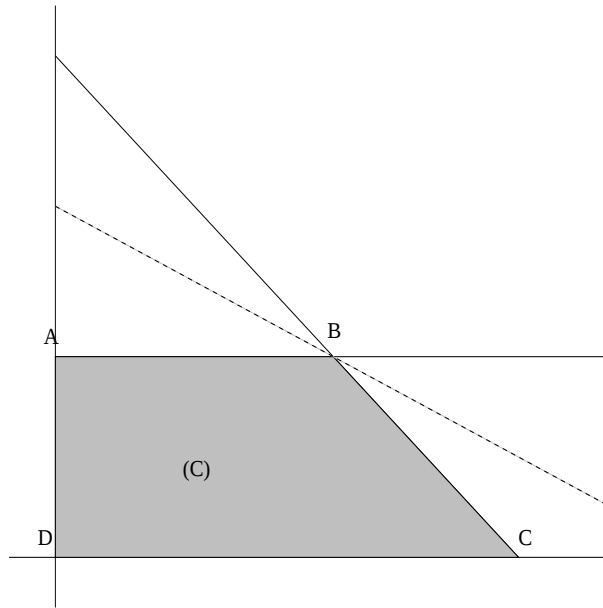
$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 100y - 2xy - y^2 \\ 100x - 2xy - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(100 - 2x - y) \\ x(100 - 2y - x) \end{pmatrix}$$

par suite les points critiques sont $(0, 0)$, $(0, 100)$, $(100, 0)$ et $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3})$. La matrice hessienne n'est pas négative pour les 3 premiers points, elle l'est pour le dernier. Ainsi $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3})$ est maximum de F . En conséquence, $x = y = z = \frac{100}{3}$ est maximum¹.

Exercice IV

1. Le graphe donne un maximum en $(6, 4)$, la fonction Z vaut alors 14.

¹Il s'agit d'un maximum local, nous n'avons pas démontré que la maximum est global



2. On considère le problème sous sa forme canonique

$$\begin{cases} \max Z = X \cdot C \\ AX = B \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} C_i & i & i & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & (0) \\ 0 & \bar{1} & & 1 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & \bar{2} & & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} C & 1 & 2 & 0 & 0 & & \\ S & 0 & 0 & 10 & 4 & & [0] \\ \Delta_j & 1 & 2 & 0 & 0 & & \end{array}$$

On choisit la seconde colonne. Il vient que la deuxième ligne donne le rapport le plus petit, le pivot est alors donné par la deuxième ligne, deuxième colonne. On obtient donc

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} C_i & i & i & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & (0) \\ 0 & \bar{1} & & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} C & 1 & 2 & 0 & 0 & & \\ S & 0 & 4 & 6 & 0 & & [8] \\ \Delta_j & 1 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

On choisit la première colonne. Il vient $x_1 = 6$ et $x_2 = 4$. On retrouve bien le résultat de la question 1.