

Feuille d'exercices 4

Optimisation sous contraintes d'égalité

Exercice I

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le(s) maximum(s) et minimum(s) des fonctions de deux variables suivantes sous la contrainte indiquée.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$
2. $f(x, y) = 4x + 6y$ avec $x^2 + y^2 = 13$
3. $f(x, y) = x^2y$ avec $x^2 + 2y^2 = 6$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec $x^4 + y^4 = 1$
5. $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ où $\varphi(x, y, z) = x + y^2 + z^3$, $u(x, y) = x^2 + 2y^2$, $v(x, y) = xy$, $w(x, y) = x + y$ et avec la contrainte $x + y = 1$

Exercice II

Refaire les exercices IV et VI de la feuille d'exercices 1, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Expliciter ces multiplicateurs dans chaque cas et interpréter.

Exercice III

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le(s) maximum(s) et minimum(s) des fonctions f suivantes sous la contrainte indiquée.

1. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 35$
2. $f(x, y, z) = 8x - 4z$ avec $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$
3. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
4. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$
5. $f(x, y, z) = x + 2y$ avec $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$
6. $f(x, y, z) = yz + xy$ avec $xy = 1$ et $y^2 + z^2 = 1$

Exercice IV

Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ intersecte le paraboloid d'équation $z = x^2 + y^2$ en une ellipse. Trouver les points de l'ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.