

Feuille d'exercices 2

Optimisation libre de fonctions de plusieurs variables

Exercice I

Calculer les extremas de la fonction f donnée.

1. $f(x, y, z) = 8x^2 + y^2 + x^2 + xz + zy + 1$
2. $f(x, y, z) = 19 - 19x + 8x^2 + y^2 + y + z^2 - 5z + xz + yz$
3. $f(x, y, z, t) = tx^2 + ty^2 + z^3$

Exercice II

Les fonctions suivantes sont-elles convexes ?

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^{2+2x+3}$
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(x^2 + y^2)$
3. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^4) \exp(x^2 + y^4 + z^2)$

Exercice III

Soit n un entier naturel non nul. On se donne n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$
2. Minimiser f sur $\mathbb{R}^2$
3. Trouver la droite “des moindres carrés” du nuage de points $\{(x_i, y_i)\}$.

Exercice IV

Trouver les extrema de la fonction f définie par

$$f(x, y, z) = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

Que remarque-t-on ?

Exercice V

On considère les formes quadratiques q suivantes. Déterminer la forme bilinéaire associée et donner sa matrice.

1. $q(x) = x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_3x_1 - 6x_1x_2$

2. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 + 4x_3^2$

3. $q(x) = 2x_1^2 + 8x_2x_3 + 3x_4^2 + 2x_1x_4$

4. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Exercice VI

Pour chaque forme quadratique q de la question précédente. Effectuer une réduction de Gauß et donner la signature. Comparer avec les valeurs propres de la matrice associée.